Variable aléatoire à densité.

Question de cours.

Donner la définition d'une densité et d'une variable aléatoire à densité.

Exercices.

Exercice - Un transfert de loi.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x(x+1} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Détermiener une densité de $\frac{1}{X}$.

Exercice - Loi du produit.

Soient U et V deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Soient $X = -\ln(U)$ et $Y = -\ln(V)$

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Déterminer la loi de e^{X+Y}, en déduire la loi de $\frac{1}{UV}$.

Variable aléatoire à densité.

Question de cours.

Énoncer précisément la condition nécessaire et suffisante pour qu'une variable aléatoire soit à densité et indiquer comment obtenir une densité.

Exercices.

Exercice - Somme de loi exponentielles.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Déterminer l'espérance et la variance de $|\frac{X+Y}{2}$ et $|\frac{X-Y}{2}$
2. Montrer que $|\frac{X+Y}{2}$ est une variable à densité et en déterminer une densité.
3. Montrer que $|\frac{X-Y}{2}$ est une variable à densité et en déterminer une densité.

Exercice - Loi du produit.

Soient U et V deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. Soient $X = -\ln(U)$ et $Y = -\ln(V)$

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Déterminer la loi de e^{X+Y}, en déduire la loi de $\frac{1}{UV}$.

Variable aléatoire à densité.

Question de cours.

Énoncer la formule de transfert.

Exercices.

Exercice - Transfert de loi et bijection reciproque.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f, déterminer sa fonction de répartition.
3. Soit $\phi : x \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$. Montrer que ϕ est bijective et déterminer sa bijection reciproque.
4. Soit X de densité f, determiner une densité de $\phi(X)$.

Exercice - Loi du produit.

Soient U et V deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. Soient $X = -\ln(U)$ et $Y = -\ln(V)$

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de $X+Y$.
3. Déterminer la loi de e^{X+Y}, en déduire la loi de $\frac{1}{UV}$.